Auswertung Versuch 31:

Optische Abbildung

von: Jonas Schwer

am: 07.10.24

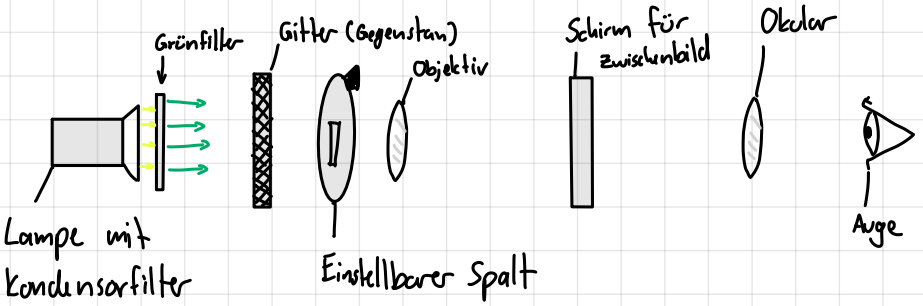
1. Einleitung

1.1 Motivation

In diesem Versuch bestimmen wir zuerst mit einem mikroskopartigen Aufbau die Gitterkonstante eines Dias, sowie das Auflösevermögen des Objektivs. Anschließend werden wir mit einem anderen Aufbau das verhalten der Bildweite bei verschiedenen Gegenstandsweiten untersuchen. Als letztes wollen wir mit Hilfe der Bessel-Methode die Brennweite einer Linse bestimmen und Effekte der sphärischen und chromatischen Abberation betrachten.

1.2 Versuchsaufbau

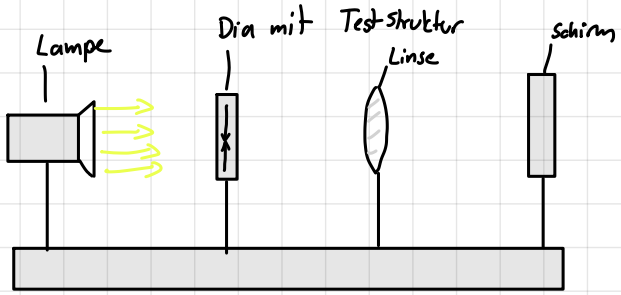
Der erste Versuchsaufbau ist das Mikroskop. Wir leuchten Licht durch einen Grünfilter und anschließend durch ein Gitter. Das Licht geht nun durch einen einstellbaren Spalt, direkt gefolgt von dem Objektiv. Etwas nach dem Objektiv wird ein Schirm für das Zwischenbild aufgestellt. Als letztes wird noch das Okular platziert. Wir stellen das Bild scharf, indem wir das Gitter verschieben, während wir durch das Okular schauen.



Skizze 1: Versuchsaufbau 1

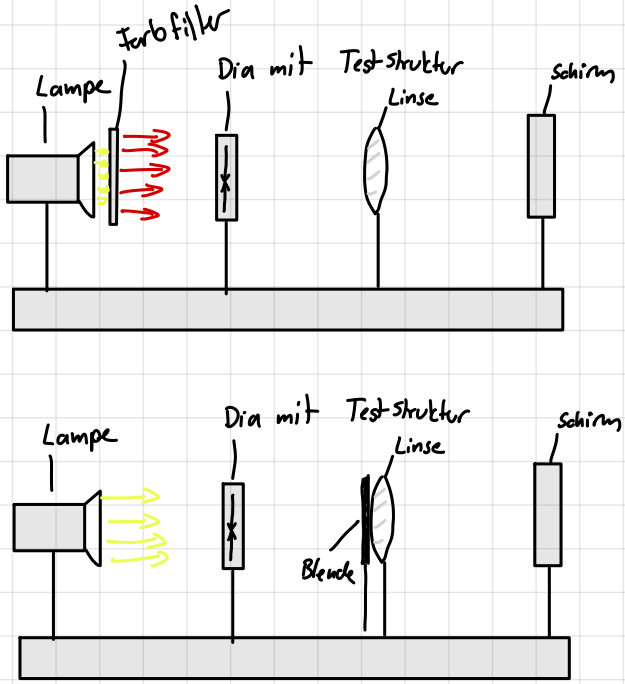
Im zweiten Versuchsaufbau nehmen wir erneut die Lampe, diesmal aber ohne Farbfilter. Die Lampe leuchtet auf ein Dia mit Teststruktur. Danach fällt das Licht auf eine achromatische Linse und zuletzt dann auf einen Schirm, der das Bild zeigt. Für eine Messreihe verschieben wir das Dia

und den Schirm, bei der zweiten bleiben Dia und Schirm konstant und die Linse wird verschoben, bis das Bild scharf ist.



Skizze 2: Versuchsaufbau 2

Wir verwenden den Aufbau aus Skizze 2 erneut, bauen allerdings für weitere Messungen einen Farbfilter oder eine Blende ein. Wir Lassen Gegenstand und Schirm wieder konstant und Verschieben die Linse erneut.



Skizze 3: Modifikationen Aufbau 2

1.3 Physikalische Grundlagen

Um vollständig zu verstehen, wie dieser Versuch funktioniert, müssen wir erst einige Grundlagen der Optik durchgehen.

In einer optischen Abbildung werden Lichtbündel, die von einem Objektpunkt ausgehen, durch etwa eine Linse, einem Spiegel oder dem menschlichen Auge so beeinflusst, dass sie sich in einem Bildpunkt wieder vereinigen. Dabei kann entweder ein reelles oder ein virtuelles Bild entstehen.

Ein virtuelles Bild entsteht, wenn die Lichtstrahlen nach der Reflexion oder Brechung am optischen System (Spiegel,... etc.) divergieren und sich nicht tatsächlich in einem Punkt treffen. Das Auge interpretiert diese Strahlen jedoch so, als würden sie sich hinter dem System schneiden. Ein Betrachter kann das Bild also erkennen, es kann aber nicht auf einem Schirm projiziert werden, da die Strahlen auseinander laufen.

Ein reelles Bild entsteht genau dann, wenn sich eben doch alle Strahlen nach dem Durchgang durch das optische System schneiden. Dann ist es auch möglich den Gegenstand scharf auf einem Schirm abzubilden.



Skizze 4: Beide Bildertypen

Strahlen, die parallel zur optischen Achse auf eine Fläche treffen, werden gebrochen, wenn sie auf ein Medium mit einem anderen Brechungsindex stoßen. (z.B von Luft in Glas). Trifft das Licht auf eine sphärische Fläche, so gilt folgende Beziehung:

$$\frac{1}{f} = \frac{(n_1 - n_2)}{n_1} \cdot \frac{1}{r} \qquad (1)$$

Dabei steht n_1 für das Ausgangsmedium, aus dem das Licht austritt und n_2 für das Medium, in das das Licht eintritt. r ist der Krümmungsradius der Oberfläche und f die Brennweite. Die Brennweite gibt die Distanz an, in der sich alle parallel einfallenden Strahlen nach der Brechung im neuen Medium treffen.

Es ist wichtig zu beachten, dass diese Beziehung nur für paraxiale Strahlen gilt, also für solche, die nahe an der optischen Achse verlaufen und somit kleine Winkel zur Achse aufweisen.

Bei der Konstruktion des Bildes können zwei einfache Regeln hilfreich sein:

- Mittelpunktstrahlen werden nicht gebrochen
- Parallele Strahlen werden Brennpunktstrahlen und umgekehrt

Eine Linse besteht aus zwei sphärischen Flächen mit den Krümmungsradien r_1 und r_2 sowie einer Dicke d. Die Brechzahl der Linse wird als n benannt. Für eine dünne Linse, bei der d im Vergleich zu den Radien sehr klein ist ($d \ll r_i$) gilt folgende Beziehung für die Brennweite f:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \qquad (2)$$

Ausserdem gilt für dünne Linsen auch noch:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \qquad (3)$$

mit g als Gegenstandsweite und b als Bildweite (Also Abstand von Bild/Gegenstand zur Linse.

Der Abbildungsmaßstab β ist definiert als:

$$\beta = \frac{G}{B} = \frac{b}{g} \tag{4}$$

wobei B die Bildgröße und G die Gegenstandsgröße ist.

Nutzen wir nun (4) und (3) erhalten wir:

$$\beta = \frac{b}{f} - 1 \tag{5}$$

Bei der Bestimmung der Brennweite mit (3) treten einige Schwierigkeiten auf. Die exakten Abstände b und g sind oft fehlerbehaftet, was die Messung ungenau macht. Bei dicken Linsen kommt hinzu, dass die Dicke nicht mehr vernachlässigt werden kann und die Hauptebenen der Linsen, deren genaue Lage oft unbekannt ist, berücksichtigt werden müssen.

Die Bessel-Methode bietet hier eine Lösung: Innerhalb eines festgelegten Abstands L zwischen Objekt und Schirm gibt es zwei Positionen x_1 und x_2, an denen das Bild scharf ist. Die Brennweite f lässt sich dann, mit weniger Fehlern, durch den Abstand $d = |x_2 - x_1|$ berechnen als:

$$f = \frac{L^2 - d^2}{4L} \tag{6}$$

Die Methode reduziert die Unsicherheit, da nur der Abstand L und die Verschiebung d benötigt werden.

Zusätzlich zu den Abstandsfehlern treten bei Linsen noch optische Abbildungsfehler auf. Die sphärische Abberation entsteht, weil nicht paraxiale Strahlen stärker abgelenkt werden und sich nicht im Brennpunkt treffen. Dieser Fehler lässt sich durch den Einsatz einer Blende reduzieren, die nur paraxiale Strahlen durchlässt.

Chromatische Abberationen entstehen, da der Brechungsindex n von der Wellenlänge abhängt. Unterschiedliche Farben werden unterschiedlich gebrochen, sie

treffen sich also nicht im selben Brennpunkt. Diesen Fehler kann man mit achromatischen Linsen korrigieren, also Linsen die speziell für dieses Problem gemacht wurden.

Nun schauen wir uns ein Mikroskop an. Dieses funktioniert, indem ein Objektiv den Gegenstand als so genanntes Zwischenbild in die Bildebene abbildet. Statt auf einen Schirm projiziert zu werden, laufen die Strahlen allerdings weiter in das Okular. Von dort aus kann man das Zwischenbild betrachten:

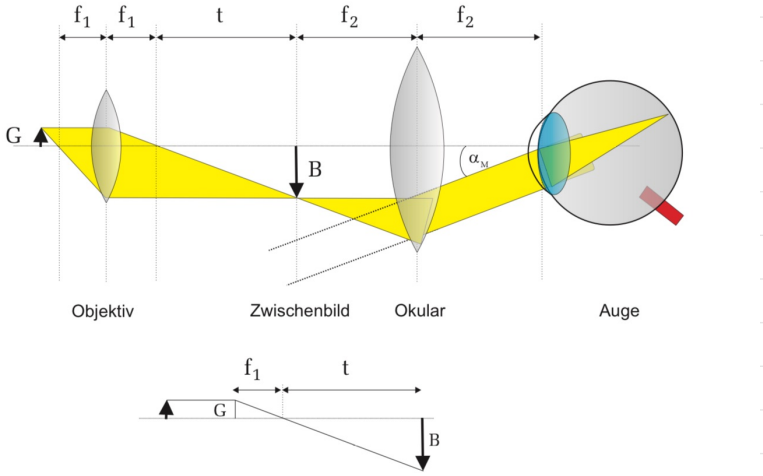


Abbildung 1: *Strahlengang eines Mikroskops. Die untere Skizze dient zur Berechnung der Mikroskopvergrößerung.*

Quelle: Praktikumsskript PAP1, Jens Wagner

Die Gesamtvergrößerung V_M des Mikroskops lautet wie folgt:

$$V_M = \frac{t}{f_1}\frac{s_0}{f_2} \tag{7}$$

t ist wie in Abbildung 1 gezeigt die Tubuslänge und f_i die jeweiligen Brennweiten. s_0 ist die deutliche Sehweite.

Beugungseffekte verhindern generell eine unendliche Vergrößerung. Solche Effekte treten beispielsweise auf, wenn die Spaltbreite des Objektivs zu klein gewählt wird. Das Rayleigh-Kriterium gibt an, unter welchen Bedingungen ein Bild gerade noch als scharf erkennbar ist.

Die Beziehung wird wie folgt formuliert:

$$G_{min} = \frac{1{,}22\,\lambda}{2n\sin\alpha} \tag{8}$$

G_{min} ist das Auflösungsvermögen, λ die Wellenlänge des Lichts, n die Brechzahl des Mediums und α der Öffnungswinkel des Objektivs.

2. Messprotokoll

25.09.2024

Versuch 31 - Optische Abbildung

Haish Mahendran
Jonas Schweer

Messaufbau:

- Optische Schiene (Genauigkeit: ± 1mm)
- Lampe mit Kondensator + Farbfilter (rot, blau, grün)
- 2 bikonvex-Linsen und 1 Achromat-Linse
- Loch- und Ringblende - Schirm

Messung 1

a) Mit dem Mikroskopaufbau wird das Gitter auf einen Millimeter-Schirm abgebildet. Die Anzahl der Striche pro 1mm wird notiert:

$X = 2 \pm 0{,}1$

b) Wir messen 3x-mal die Spaltbreite bei der die vertikalen Striche verschwinden.

$b = (25{,}40 \pm 0{,}14)$ mm
$f_1 = 4$ cm

Messung	Weite [mm]
1.	0,20 ± 0,03
2.	0,21 ± 0,03
3.	0,19 ± 0,3

Qualitative Betrachtung:

das Auflösevermögen, ist beim blauen Licht kleiner als beim grünen Licht
bei rot lag sie im selben Bereich, wie bei grünen Licht

Bestimmung von f:

$g = 11{,}55$

$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$

$b = 56{,}75 \Rightarrow f = 7{,}87$ cm

Messung 2 (Aufgabe 2)

Nun werden bei verschiedenen Gegenstandweiten g die Bildweite b, Bildgröße B, Gegenstandgröße G, Art und Richtung des Bildes.

(r ≙ reell; v ≙ virtuell; a ≙ aufrecht; u ≙ umgekehrt)

	g [cm]	G [mm]	b [cm]	B [mm]	Art	Richtung	
$\infty > g > 2f$							* unten
$g = 2f$	$2f$	8,0	20,80 ± 0,14	$g_0 \pm 0{,}5$	r	u	
$2f > g > f$							* unten
$g = f$	f	8,0 ±	-	-	v	u	
$f > g$	7,5 cm	8,0 ±	-	-	v	u	

3 Werte zwischen

$2f > g > f$:

g [cm]	G [mm]	b [cm]	B [mm]	Art	Richtung
13,10 ±0,14	8,0	42,50 ±0,14	51,0 ±0,5	r	u
12,75 ±0,14	8,0	45,40 ±0,14	29,0 ±0,5	r	u
13,75 ±0,14	8,0	36,50 ±0,14	21,0 ±0,5	r	u

3 Werte zwischen

$\infty > g > 2f$:

g [cm]	G [mm]	b [cm]	B [mm]	Art	Richtung
34,75 ±0,14	8,0	14,30 ±0,14	3,0 ±0,5	r	u
24,75 ±0,14	8,0	16,85 ±0,14	5,0 ±0,5	r	u
27,75 ±0,14	8,0	16,00 ±0,14	4,0 ±0,5	r	u

Messung 3 (Aufgabe 3)

Nun wird der Bessel-Methode, die Brennweite der L_1-Linse bestimmt. Der Abstand zwischen Bild und Gegenstand beträgt:

$$L = (60,00 \pm 0,10)\ cm$$

es werden die Orte der Linse notiert, wo das Bild scharf ist

Messung	x_1 [cm]	x_2 [cm]	d [cm]	$\bar{d}$ [cm]	σ_d [cm]
1.	41,60 ±0,10	68,00 ±0,20	26,40 ±0,22		
2.	41,80 ±0,10	68,45 ±0,20	26,55 ±0,22	26,35	0,18
3.	42,10 ±0,10	68,30 ±0,20	26,20 ±0,22		

Messung 4 (Aufgabe 4)

Messung 3 wird nun mit roten Licht wiederholt

Messung	x_1 [cm]	x_2 [cm]	d [cm]	$\bar{d}$ [cm]	σ_d [cm]
1.	42,05 ±0,10	68,00 ±0,20	25,95 ±0,22		
2.	42,00 ±0,10	68,10 ±0,20	26,15 ±0,22	26,08	0,11
3.	42,00 ±0,10	68,20 ±0,20	26,15 ±0,22		

und nochmal mit blauen Licht

Messung	x_1 [cm]	x_2 [cm]	d [cm]	$\bar{d}$ [cm]	σ_d [cm]
1.	41,50 ±0,10	68,50 ±0,20	27,00 ±0,22		
2.	41,50 ±0,10	68,45 ±0,20	26,95 ±0,12	27,01	0,07
3.	41,50 ±0,10	68,60 ±0,20	27,10 ±0,22		

Qualitative Betrachtung:

Es wird nun qualitativ betrachtet, wie sich d verändert, wenn man eine Loch/Ring-Blende verwendet

- Ringblende: $d = 26,9$
- Lochblende: $d = 25,35$

25.9.2024
M.D.

3. Auswertung

Aufgabe 1.1: Ergänzung der Tabelle

Als erstes wollen wir unsere Tabelle um den Abbildungsmaßstab erweitern. Berechnen werden wir diesen mit Formel (4). Der Fehler ergibt sich nach Gauß als:

$$\Delta\beta = \beta\sqrt{\left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2} \qquad (9)$$

(r ≙ reell ; v ≙ virtuell; a ≙ aufrecht; u ≙ umgekehrt)

	g [cm]	G [mm]	b [cm]	B [mm]	Art	Richtung	β
g=2f	19,74 ±0,14	8,0 ± 0,5	20,80 ± 0,14	8,0 ± 0,5	r	u	1,054 ± 0,009
g=f	9,87 ±0,14	8,0 ± 0,5	–	–	v	u	/
f>g	7,51 ± 0,14	8,0 ± 0,5	-	-	v	u	/

2f > g > f:

g [cm]	G [mm]	b [cm]	B [mm]	Art	Richtung	β
13,10 ±0,14	8,0 ± 0,5	42,50 ±0,14	51,0 ±0,5	r	u	3,24 ± 0,04
12,75 ±0,14	8,0 ± 0,5	45,40 ±0,14	29,0 ± 0,5	r	u	3,56 ± 0,04
13,75 ±0,14	8,0 ± 0,5	36,50 ±0,14	21,0 ± 0,5	r	u	2,65 ± 0,04

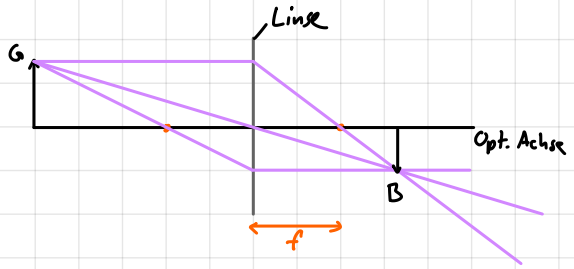
∞ > g > 2f:

g [cm]	G [mm]	b [cm]	B [mm]	Art	Richtung	β
34,75 ±0,14	8,0	14,30 ±0,14	3,0 ± 0,5	r	u	0,412 ± 0,004
24,75 ±0,14	8,0	16,85 ±0,14	5,0 ± 0,5	r	u	0,681 ± 0,007
29,75 ±0,14	8,0	16,00 ±0,14	4,0 ± 0,5	r	u	0,538 ± 0,006

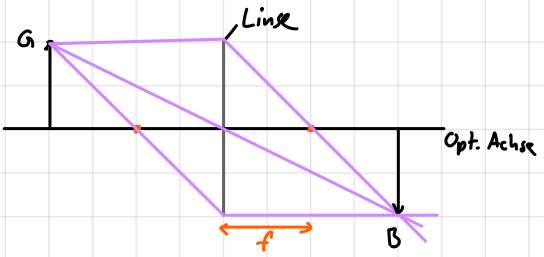
Tabellen 1,2,3: Erweiterung der Tabellen aus dem Messprotokoll um β

Aufgabe 1.2 Graphische Darstellung des Bildes:

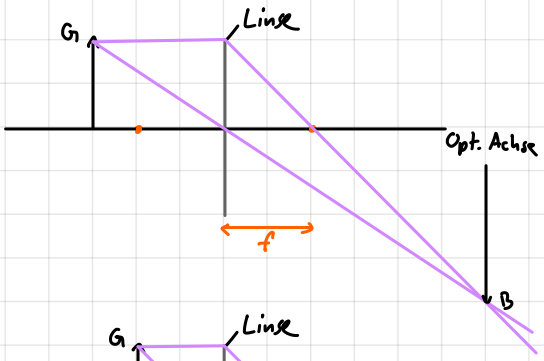
Nun wollen wir beispielhaft Darstellen, wie das Bild bei den verschiedenen Distanzen zustande kommt. Dafür machen wir uns Mittel-, Brenn- und Parallelstrahlen zu nutze.



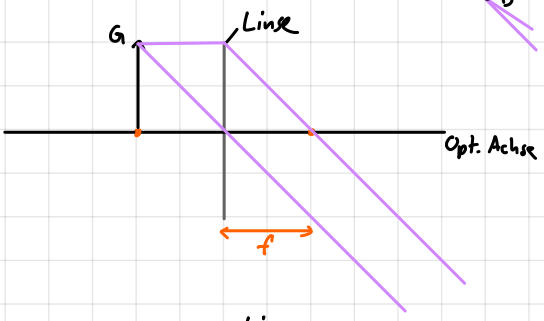
$\infty > g > 2f$



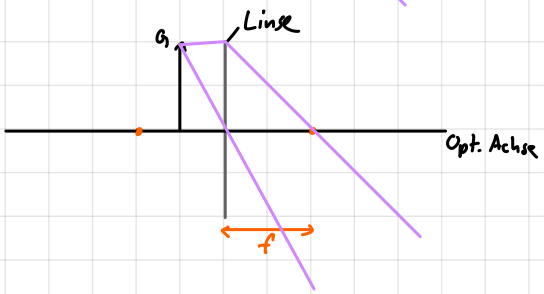
$g = 2f$



$2f > g > f$



$g = f$

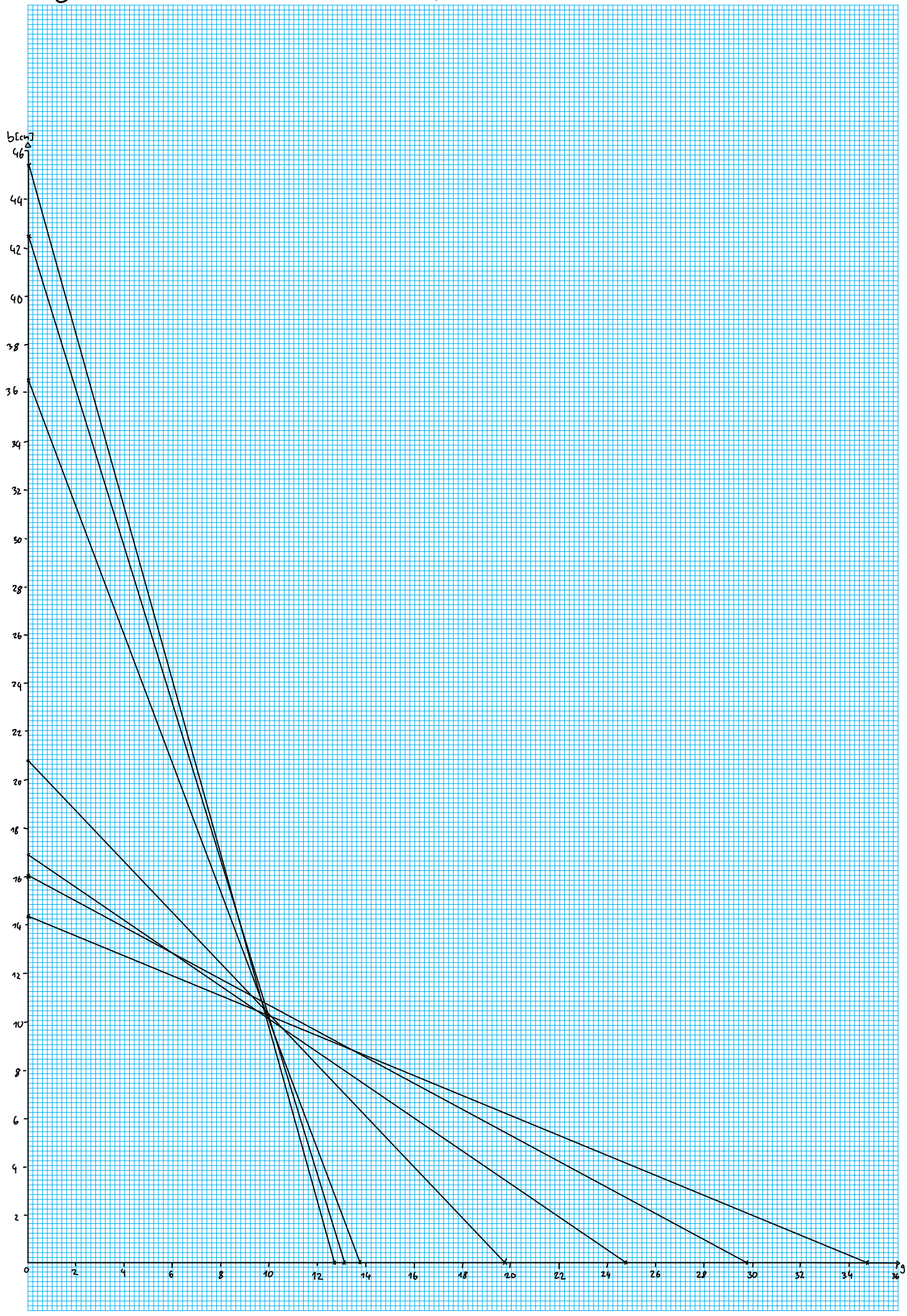


$g < f$

Aufgabe 3.1: Grafische Bestimmung von f

Wir tragen nun unsere gemessenen Werte in ein Diagramm ein. Dafür markieren wir jeweils b und g auf den zugehörigen Achsen und verbinden sie. Beim Schnittpunkt aller Geraden lässt sich f ablesen. Fehlergeraden werden wir nicht einzeichnen, da es sonst zu unübersichtlich wird und die Fehler sowieso recht klein sind.

Diagramm 1: Brennweitenbestimmung



Aus dem Diagramm schätzen wir für die Brennweite von $f = (10{,}0 \pm 0{,}4)\,cm$ ab.

Aufgabe 2: Bestimmung Brennweite mit dem Besselverfahren.

Wir wollen nun die Brennweite der Linse mit Formel (6) bestimmen. Da wir sowohl d als auch σ_d bereits auf dem Messprotokoll berechnet haben, müssen wir nurnoch die Fehlerformel nach Gauß bestimmen. Diese Lautet:

$$\Delta f = \sqrt{\left[\left(1 + \frac{d^2}{L^2}\right)\frac{\Delta L}{4}\right]^2 + \left[\frac{d}{2L}\Delta d\right]^2} \qquad (10)$$

Wir errechnen die Brennweite so als:

$$f = (12{,}10 \pm 0{,}05)\,cm$$

Aufgabe 3: Betrachtung der Linsenfehler

Nun wollen wir uns anschauen was mit der Brennweite passiert, wenn wir einen Farbfilter vor die Lampe platzieren. Führen wir also nun die selbe Rechnung wie in Aufgabe 2 durch, erhalten wir:

$$f_{rot} = (12{,}17 \pm 0{,}04)\,cm$$

$$f_{blau} = (11{,}96 \pm 0{,}03)\,cm$$

Aufgabe 4: Bestimmung Gitterkonstante und Auflösevermögen

Die Gitterkonstante gibt die Abstände der Gitterlinien. Sie ist also der Kehrwert der dokumentierten Gitterlinien pro mm. Wir errechnen die Gitterkonstante

$$y' = \frac{1}{m} \qquad (11)$$

wobei m die Anzahl der Gitterstäbe pro mm ist und y' die vergrößerte Gitterkonstante. Da wir allerdings eben genau eine vergrößerte Konstante ist, müssen wir sie um Abbildungsmaßstab β verkleinern. Wir bestimmen β mit Formel (5) als $\beta = 5{,}25 \pm 0{,}03$ (b und f sind dem Aufbau

zu entnehmen. Die echte Gitterkonstante g_G ist also

$$g_G = \frac{g'}{\beta} = \frac{1}{m\beta} \tag{12}$$

Der Fehler nach Gauß ist:

$$\Delta g_G = g_G \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \beta}{\beta}\right)^2} \tag{13}$$

Wir erhalten also

$$g_G = 0{,}095 \pm 0{,}007 \text{ mm}$$

Nun wollen wir auch das Auflösevermögen mit Formel (8) bestimmen. Die Wellenlänge λ ist als 550nm gegeben, und da im Skript kein Fehler angegeben ist, nehmen wir ihn als vernachlässigbar klein an. Da das Medium Luft ist, gehen wir von einem Brechungsindex $n = 1$ aus. Um den Öffnungswinkel α zu bestimmen, kommen wir mit einigen Überlegungen darauf, dass gelten muss:

$$\tan(\alpha) = \frac{r}{2A} \tag{14}$$

A ist hier der Abstand des Spaltes zum Objekt und r die Spaltbreite.

Da $A \gg r$, können wir die Kleinwinkelnäherung $\tan(\alpha) \approx \sin(\alpha)$ nutzen, und vereinfachen (8) so zu:

$$G_{min} = 1{,}22 \frac{\lambda A}{r} \tag{15}$$

Der Fehler nach Gauß beträgt:

$$\Delta G_{min} = G_{min} \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2}$$

← Mittelwert aus Messprotokoll werten mit Standardabweichung

Für $A = (3{,}70 \pm 0{,}14)$ cm und für $r = (0{,}20 \pm 0{,}01)$ mm eingesetzt, erhalten wir:

$$G_{min} = (0{,}124 \pm 0{,}008) \text{ mm}$$

4. Zusammenfassung und Diskussion

Zusammenfassend haben wir zuerst ein Mikroskopsystem aufgebaut, um damit die Gitterkonstante eines Gitters zu bestimmen. Auch haben wir das Auflösevermögen des Mikroskops experimentell herausgefunden.

Unsere Ergebnisse hier lauten wie folgt:

$$g_G = (0{,}095 \pm 0{,}007)\,\text{mm}$$

$$G_{min} = (0{,}124 \pm 0{,}008)\,\text{mm}$$

Daraufhin haben wir die Brennweite einer achromatischen Linse bestimmt, indem graphisch Bild- und Gegenstandsweiten aufgetragen haben. Hier haben wir $f = (12{,}10 \pm 0{,}05)\,\text{cm}$ herausbekommen.

Als letztes haben wir für eine weitere Linse mit Hilfe des Bessel-Verfahren Die Brennweiten ohne Lichtfilter, mit Rotlichtfilter und mit Blaulichtfilter bestimmt. Wir erhielten:

$$f_{weiß} = (12{,}10 \pm 0{,}05)\,\text{cm}$$

$$f_{rot} = (12{,}17 \pm 0{,}04)\,\text{cm}$$

$$f_{blau} = (11{,}96 \pm 0{,}03)\,\text{cm}$$

Vergleichen wir g_G mit G_{min}, zeigt sich eine Abweichung von 2,7 Sigma. Zwar ist das noch keine signifikante Abweichung, jedoch ist sie trotzdem sehr groß. Vermutlich ist das darauf zurückzuführen, dass es vor allem beim bestimmen der Spaltbreite, bei der das Gitter grade noch sichtbar ist, sehr schwer ist, sicher zu sagen, wann der Punkt erreicht ist. Die Einschätzung, ob der richtige Punkt bereits gekommen ist, oder ob man sich die Linien nur einbildet, ist vermutlich die größte Fehlerquelle. Auch ist es schwierig einzuschätzen, wann das Gitter scharf ist und wann nicht. So ist auch die Bestimmung von g_G nicht besonders genau.

Schauen wir uns nun die Brennweiten mit und ohne Farbfilter an, so erkennen wir, dass die größte Brennweite vom roten Licht ausgeht und die niedrigste vom blauen. Das weiße Licht liegt zwischen den Beiden. Dieses Ergebnis war auch so zu erwarten, da das blaue Licht eine sehr kurze Wellenlänge aufweist, und somit stärker bei einem Medium wechsel stärker gebrochen wird, als beispielsweise das rote Licht, was eine eher große Wellenlänge besitzt. Da das weiße Licht Wellenlängen des kompletten Farbspektrum enthält, ist zu erwarten, dass sich die Brennweite irgendwo zwischen den beiden Extrema befinden wird. Durch die chromatische Abberation wird es allerdings nicht so scharf werden wie Licht einer Wellenlänge. Auch wenn wir hier die erwarteten Ergebnisse erhielten, ist es trotzdem wahrscheinlich, dass der Wert vom Echtwert abweicht, da es auch hier unmöglich ist genau zu bestimmen, wann das Bild am schärfsten ist. Besonders auch, weil das Bild bei manchen Messungen unfassbar klein werden. Alles in Allem bin ich aber doch recht zufrieden mit den Ergebnissen.

Bei einer erneuten Durchführung würde ich also versuchen einen Weg zu finden, den schärfsten Punkt präziser zu bestimmen. Da das menschliche Auge durch die subjektive Wahrnehmung und Erwartungshaltung (e.g. ich bilde mir etwas ein, was ich garnicht sehe) nicht sehr präzise ist, wäre ein Computerprogramm zur Hilfe denkbar. Andernfalls könnte man den Messsatz von 3 noch erhöhen um so genauere Ergebnisse zu erzielen. Auch Messungen von verschiedenen Personen könnte hilfreich sein, um gegen die Subjektivität anzukommen.